

Міністерство освіти і науки України
Національна академія наук України
Національний центр «Мала академія наук України»

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ
III етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту
науково-дослідницьких робіт учнів –
членів Малої академії наук України
2017

Частина 1 **ж**

Київ
2017

УДК 374

ББК 74.200.58

Контрольні завдання III етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України у 2017 році. – Ч. 1. – 268 с.

Відповідальний за випуск:

О. Лісовий

Упорядники:

О. Пономаренко, А. Малиш, А. Шинкарук

Верстка:

Л. Северенчук

Дизайн обкладинки:

Б. Лісовський

Автори контрольних робіт:

*Адріанов В. Л., Борисенко О. В., Вербицький В. В.,
Засєдка Л. М., Ісаєва О. В., Коляда І. А., Масляк П. О., Масловська Л. Г.,
Плахотник В. В., Савченко І. В., Слива Т. В., Сипій В. В.,
Федорчук А. В., Філоненко Р. В.*

У збірці розміщені умови контрольних робіт, що були запропоновані на III етапі Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України у 2017 році.

УДК 374

ББК 74.200.58

■ **ЗМІСТ**

ВІДДІЛЕННЯ ТЕХНІЧНИХ НАУК	4
ВІДДІЛЕННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК	14
ВІДДІЛЕННЯ ЕКОНОМІКИ	18
ВІДДІЛЕННЯ МАТЕМАТИКИ	22
ВІДДІЛЕННЯ ФІЗИКИ І АСТРОНОМІЇ	26
ВІДДІЛЕННЯ НАУК ПРО ЗЕМЛЮ	31
ВІДДІЛЕННЯ ЛІТЕРАТУРОЗНАВСТВА, ФОЛЬКЛОРИСТИКИ ТА МИСТЕЦТВОЗНАВСТВА	43
ВІДДІЛЕННЯ ІСТОРІЇ	76
ВІДДІЛЕННЯ ЕКОЛОГІЇ ТА АГРАРНИХ НАУК	210
ВІДДІЛЕННЯ ХІМІЇ ТА БІОЛОГІЇ	237



**ВІД ДІЛЕННЯ
ТЕХНІЧНИХ НАУК**

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ З ФІЗИКИ

■ 8-9 клас

1. Рухаючись зі швидкістю 36 км/год потяг проходить повз нерухомого спостерігача протягом 10 с. Який час цей потяг буде обганяти велосипедиста, що рухається зі швидкістю 4 м/с у напрямку руху поїзда?

2. Пружину спочатку розтягують на 2 см і виконують при цьому роботу A^1 , а потім розтягують ще на 1 см, виконуючи роботу A^2 . Знайдіть відношення робіт, що виконала зовнішня сила при розтягуванні пружини. Сила пружності пропорційна видовженню пружини.

3. Яку потужність розвивають м'язи людини масою 50 кг, якщо вона за 1 хв піднімається на 4-й поверх п'ятиповерхового будинку сходами? Висота одного поверху 3 метри.

4. Суміш із свинцевих та алюмінієвих ошурок, масою 100 г і температурою 100 °С, висипали в калориметр з водою. Маса води 200 г, її температура 15 °С. У калориметрі встановилась температура 20 °С. Скільки свинцю було в суміші? Теплоємність свинцю, алюмінію та води, відповідно, дорівнюють 125, 900 та 4200 Дж/кг·°С. Теплоємність калориметра нехтовно мала.

5. Два точкових заряди q та $-9q$ взаємодіють з силою 1 мН. З якою силою вони будуть взаємодіяти після дотику і розведення на ту саму відстань?

6. У посудину площею перерізу 10 см² налили 50 мл води. Дерев'яний куб кинули у воду (сторона куба 2 см, густина дерева 0,8 г/см³, густина води 1 г/см³). Дайте відповіді на запитання.

6.1. Яка частина куба занурена у воду?

6.2. На скільки змінився тиск на дно посудині після того, як куб вкинули у воду?

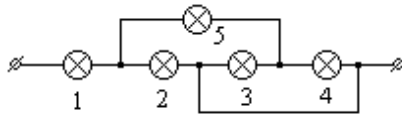
6.3. Тіло якої мінімальної маси треба поставити на куб, щоб він повністю занурився у воду?

6.4. Якщо кубу дати можливість вільно плавати у воді, а поверх води у посудину долити 6 см^3 олії (густина олії $0,9 \text{ г/см}^3$), то яка частина куба буде занурена у воду?

6.5. Яким буде відношення сил Архімеда, що діють на куб з боку води та олії (пункт 6.5)?

6.6. Чому дорівнює сила тяжіння, що діє на куб?

7. У електричному колі (див. рис.) всі лампи однакові і підключені до напруги 110 В. На кожній лампі написано «110 В, 60 Вт». Визначить потужність, що споживає кожна лампа при такому включенні.



■ 10 клас

1. Моток мідного дроту з площею перерізу 2 мм^2 має масу 20 кг. Чому дорівнює довжина дроту? Густина міді 8900 кг/м^3 .

2. Гелій займає об'єм 4 л за тиску 200 кПа. Знайдіть сумарну кінетичну енергію руху всіх його молекул.

3. Зі шланга, встановленого на землі, б'є під кутом 30° до горизонту струмінь води з початковою швидкістю 15 м/с . Площа перерізу отвору шланга 1 см^2 . Визначить масу води в струмені, який знаходиться в повітрі. Густина води 1 г/см^3 , $g=10 \text{ м/с}^2$.

4. У калориметрі зливають по 100 мл води і олії, що мають, відповідно, температуру 80 оС та 200 оС . Скільки рідини буде в калориметрі (у мл) після встановлення теплової рівноваги? Густина води і олії, відповідно, 1 г/см^3 , $0,9 \text{ г/см}^3$, питомі теплоємності, відповідно, рівні $4200 \text{ Дж/кг}\cdot\text{оС}$, $1800 \text{ Дж/кг}\cdot\text{оС}$, питома теплота пароутворення

води 2,3 МДж/кг. Залежність об'єму рідини від температури не враховувати.

5. На диску, що може обертатися навколо вертикальної осі, лежить маленька шайба масою 100 г. Шайба з'єднана з віссю горизонтальною пружиною. Якщо частота обертання диску не перевищує 2 об/с, то пружина знаходиться в не розтягнутому стані. При частоті обертання 5 об/с, довжина пружини вдвічі більша. Знайдіть жорсткість пружини. Можна вважати $\pi^2 = 10$.

6. Тягарець масою 100 г підвішений на гумовій стрічці довжиною 10 см, здійснює вертикальні гармонічні коливання з періодом 0,5 с і амплітудою 2 см. Коливання починаються з положення рівноваги тягарця, їх можна вважати гармонійними.

1) Визначить жорсткість гумової стрічки, на якій підвішений тягарець.

2) Який шлях проходить тягарець за 5 с?

3) Яка максимальна швидкість руху тягарця?

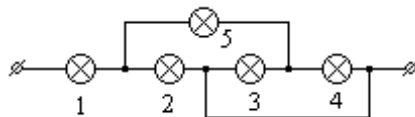
4) Якою буде швидкість тягарця при коливаннях в момент часу, коли видовження гумової стрічки буде 1 см?

5) Скільки разів за період кінетична енергія тягарця дорівнює потенціальній енергії гумової стрічки?

6) Яким буде період коливань, якщо масу тягарця збільшити вдвічі?

7) Яким буде період коливань, якщо тягарець масою 100 г підвісити на гумову стрічку довжиною не 10, а 4 см?

7. У електричному колі (див. рис.) всі лампи однакові і на кожній написано «110 В, 60 Вт». Визначить потужність, що споживає кожна лампа при такому включенні, якщо на клема подана напруга 110 В.



■ 11 клас

1. На якій відстані від лінзи, оптична сила якої 6 дптр, буде розташоване дійсне зображення предмета, збільшене в чотири рази?

2. У посудину з малою теплоємністю злили 0,5 літрів води при температурі 90 °С, 1 літр води при температурі 50 °С і 3 літра води при температурі 20 °С. Яка температура води у каструлі?

3. У закритій посудині міститься кисень при температурі 27 °С. При підвищенні температури на 200 °С, 10% молекул розпались на атоми. Як при цьому змінився тиск?

4. Колодязь площею перерізу 1 м² і глибиною 6 м наполовину заповнений водою. Насос відкачує воду на поверхню через циліндричну трубу площею 5 см² з постійною швидкістю. Визначить потужність насоса, якщо він відкачав всю воду за 30 хв?

5. М'яч масою 1 кг кинули з висоти 5 м вертикально вгору з початковою швидкістю 5 м/с. Через який час кінетична енергія м'яча рівна його потенціальній енергії? Прискорення вільного падіння 10 м/с². Нульовий рівень потенціальної енергії взяти на поверхні землі.

6. Робота виходу електронів з вольфраму 4,5 еВ. 1 еВ=1,6·10⁻¹⁹ Дж. Стала Планка 6,6·10⁻³⁴ Дж·с, швидкість світла 3·10⁸ м/с, елементарний заряд 1,6·10⁻¹⁹ Кл.

6.1 Визначить червону межу фотоелекту для вольфраму. Відповідь надайте в мкм.

6.2 Чому дорівнює маса фотонів з пункту 6.1?

6.3 Чому дорівнює імпульс фотонів з пункту 6.1?

6.4 Чи виникне фотоелект на вольфрамовому катоді, якщо довжину хвилі з пункту 6.1 збільшити у 2 рази?

6.5 Чому дорівнюватиме максимальна кінетична енергія фотоелектронів при освітленні вольфрамового катода світлом з частотою 2·10¹⁵ Гц?

6.6 Яку запірну напругу (у вольтах) потрібно прикласти, щоб фотострум припинився при освітленні вольфрамового катода світлом з частотою $2 \cdot 10^{15}$ Гц?

6.7 Як зміниться фотострум при освітленні вольфрамового катода світлом з частотою $2 \cdot 10^{15}$ Гц, якщо інтенсивність світла збільшити у 2 рази?

7. Штучний супутник Землі масою 1 т обертається на навколоземній орбіті. Прискорення вільного падіння біля поверхні Землі та на незначних висотах (≈ 10 м/с²). Радіус Землі 6400 км.

7.1 Визначте першу космічну швидкість супутника.

7.2 Визначте прискорення супутника.

7.3 З якою силою супутник діє на Землю при русі по навколоземній орбіті?

7.4 Чому дорівнює період обертання супутника на навколоземній орбіті?

7.5 Якою буде швидкість руху супутника, якщо радіус його орбіти збільшити вдвічі?

7.6 З якою силою Земля діє на супутник при русі по орбіті з пункту 7.5?

7.7 Яку частину кола пройде супутник за 1 годину при русі по орбіті з пункту 7.5?

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ З МАТЕМАТИКИ

■ 9 клас

I рівень

(повне і правильне розв'язання кожної задачі оцінюється в 3 бали)

1. Побудувати графік функції $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$.

2. Обчислити $\frac{5}{4 + \sqrt{11}} + \frac{8}{\sqrt{19} - \sqrt{11}} - \frac{10}{\sqrt{19} + 3}$ (обґрунтовано і без використання калькулятора).

3. Розв'язати нерівність $\frac{(2x+1)^3 \cdot (2x+4)^4}{(2x+5)^5} \geq 0$.

II рівень

(повне і правильне розв'язання кожної задачі оцінюється в 5 балів)

1. Розкласти на множники вираз

$$A = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$$

2. Два кола радіусів $R = 3$ см і $r = 3$ см дотикаються зовні. Знайти відстань від точки дотику кіл до їх спільної дотичної.

III рівень

(повне і правильне розв'язання кожної задачі оцінюється в 7 балів)

1. При якому значенні параметра a рівняння $x^2 + ax + 8 = 0$ та $x^2 + x + a = 0$ мають один спільний корінь?

2. Зобразити на координатній площині множину точок $(x; y)$, координати яких задовольняють рівнянню

$$\sqrt{(x+1)(y-2)} = \sqrt{2-y} \cdot \sqrt{-x-1}.$$

■ 10 клас

I рівень

(повне і правильне розв'язання кожної задачі оцінюється в 3 бали)

1. Обчислити $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}} - \frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$ (без використання калькулятора).

2. Розв'язати нерівність $(x+6)\sqrt{x^2+2x-3} \leq 0$.

3. Вкладник поклав до банку 8000 грн. під 7% річних. Скільки грошей на рахунку буде через три роки?

II рівень

(повне і правильне розв'язання кожної задачі оцінюється в 5 балів)

1. Спростити вираз $2\cos^2 2\alpha + \sqrt{3}\sin 4\alpha - 1$ до однієї тригонометричної функції з числовим коефіцієнтом.

2. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} xyz = 1, \\ xyt = 4, \\ xtz = -2, \\ yzt = 27. \end{cases}$$

III рівень

(повне і правильне розв'язання кожної задачі оцінюється в 7 балів)

1. Розв'язати рівняння $(x^3 + x^{-3}) + (x^2 + x^{-2}) + (x^1 + x^{-1}) = 6$.
2. У рівносторонній трикутник вписано другий рівносторонній трикутник, вершинами якого є середини сторін першого трикутника. У другий трикутник таким самим способом вписано третій і так далі (див. рисунок). Знайти суму всіх периметрів трикутників, якщо сторона першого трикутника дорівнює 4 см..

■ 11 клас

I рівень

(повне і правильне розв'язання кожної задачі оцінюється в 3 бали)

1. Обчислити інтеграл $\int |x - 1| dx$.
2. Порівняти числа $A = \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ та $B = \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$ (обґрунтовано, без використання калькулятора).
3. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює 1 м^2 . Площа діагональних перерізів 3 м^2 і 6 м^2 . Знайти об'єм паралелепіпеда.

II рівень

(повне і правильне розв'язання кожної задачі оцінюється в 5 балів)

1. Обчислити $\frac{0,2(18)}{6} - \frac{14}{110}$.
2. Розв'язати рівняння $x^2 - 3x \cdot \frac{|\sin x|}{\sin x} - 10 = 0$.

III рівень

(повне і правильне розв'язання кожної задачі оцінюється в 7 балів)

1. Скільки коренів має рівняння $(2^x - 1 - |x|)\sqrt{5x - x^2 - 6} = 0$.

2. Знайти всі значення параметра a , при яких для всіх дійсних значеннях x справджується нерівність

$$4^{x^2} + 2(2a + 1)2^{x^2} + 4a^2 - 3 > 0.$$



**ВІДДІЛЕННЯ
КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК**

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ З МАТЕМАТИКИ

■ 9 клас

I рівень

1. Нехай $8 < x < 12 < y < 18$. Чи правда, що $4,8 < \frac{xy}{x+y} < 7,2$? Відповідь обґрунтувати.
2. Знайти кількість трикутників, серед яких немає подібних, і усі внутрішні кути кожного із трикутників кратні куту 18° .
3. Довести, що ні при якому натуральному значенні n число $n^4 + 2n^2 + 9$ не може бути простим.

II рівень

1. В трикутнику одна із медіан ділить одну із висот у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини. Довести, що трикутник рівнобедрений.
2. Довести, що сума квадратів семи послідовних цілих чисел не може бути квадратом цілого числа.

III рівень

1. Знайти усі трійки $(x; y; z)$ натуральних чисел, для яких
$$3xyz - 4yz + 2x + 11y = 32.$$
2. При яких значеннях параметра a множиною розв'язків нерівності $|x^2 - 4x + a| \leq 2x - x^2$ буде проміжок довжини 1?

■ 10 клас

I рівень

1. Знайти множину значень функції $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x + 2}$.
2. Схематично зобразити графік функції $y = \frac{|x-2| - x + 2}{|x| + x}$.
3. Знайти кількість розв'язків рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, які належать проміжку $[-\frac{9\pi}{7}; \frac{26\pi}{11}]$. Знайти найменший із цих розв'язків.

II рівень

1. В трикутнику одна із медіан ділить одну із висот у відношенні , рахуючи від вершини. Довести, що трикутник рівнобедрений.
2. Знайти усі трійки $(x; y; z)$ натуральних чисел, для яких $3xyz - 4yz + 2x + 11y = 32$.

III рівень

1. При яких значеннях параметра множиною розв'язків нерівності $|x^2 - 4x + a| \leq 2x - x^2$ буде проміжок довжини 1?
2. Нехай a, b, c, d – додатні дійсні числа, для яких $4a^2 \geq 3b$, $c^2 \geq 3d$, $2a \leq c$, $ad \leq bc$. Довести, що $2ac \geq 2b + d$.

■ 11 клас

I рівень

1. Схематично зобразити графік $y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ при $x \in [-1; 3]$.
2. Знайти площу трикутника ABC , заданого координатами вершин $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$ в прямокутній системі координат $Oxyz$.
3. Не використовуючи калькулятор, встановити, що більше: число $5 \cdot \log_a 7$ чи число $14 \cdot \log_a 2$, якщо $a = \sqrt{10} - 3$.

II рівень

1. В таблиці

9	5	*
*	*	*
*	*	*

замінити символи "*" на цілі додатні чис-

ла так, щоб усі дев'ять чисел таблиці були різними, а усі вісім сум чисел таблиці, які стоять в кожному із трьох рядків, у кожному із трьох стовпців і в кожній з двох діагоналей, були однаковими. Знайти усі розв'язи задачі.

2. Знайти усі значення параметра a , при кожному із яких нерівність $2x^2 + ax + a - 3 \leq 0$ хибна для усіх цілих чисел x , крім якогось одного із них.

III рівень

1. Нехай A, B, C, D – чотири різні точки простору, із яких ніякі три не лежать на одній прямій, і для яких справджується рівність $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$. Довести, що A, B, C, D – є паралелограмом.

2. Розв'язати рівняння $\sqrt{\sin 4x} + \sqrt[6]{\cos 4x} = \sqrt[7]{\cos 7x}$.



**ВІДДІЛЕННЯ
ЕКОНОМІКИ**

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ З МАТЕМАТИКИ

■ 9 клас

I рівень

1. Довести, що для довільного цілого m існує таке ціле n , що число $n^4 + 3n + m$ без остачі ділиться на 7.

2. Нехай a, b, c — сторони, α, β, γ — протилежні внутрішні кути трикутника відповідно. Довести, що рівність $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \gamma$ неможлива в жодному трикутнику.

3. Нехай a, b — катети, c — гіпотенуза прямокутного трикутника. Довести нерівність $1 < \frac{7a + b + 5c}{2a - 4b + 10c} \leq \frac{5}{4}$.

II рівень

1. При яких значеннях параметра a один із коренів квадратного рівняння $x^2 - ax + a - 1 = 0$ удвічі більший за іншого?

2. Знайти усі такі значення параметра a , щоб існувало єдине ціле число x , для якого правильна нерівність $x^2 + (1 - a)x + (a - 2) \leq 0$.

III рівень

1. Знайти усі можливі значення числа a , щоб множиною значень функції $f(x) = \frac{ax^2 - 3x + 6}{x^2 - x + 2}$ був проміжок $[3; 5]$.

2. У трикутнику ABC проведено висоту BH і медіану CM . Відомо, що площа трикутника HMA — четверта частина площі трикутника ABC . Довести, що трикутник ABC — рівнобедрений.

■ 10 клас

I рівень

- Розв'язати рівняння $2^x = \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$.
- Нехай a, b – катети, c – гіпотенуза прямокутного трикутника. Довести нерівність $1 < \frac{7a+b+5c}{2a-4b+10c} \leq \frac{5}{4}$.
- Схематично зобразити графік функції $y = |x-1| - |x-2|$.

II рівень

- При яких значеннях параметра a існує єдине число x , для якого

$$\begin{cases} (x+2a)(x-a-3) \leq 0 \\ (x-3a)(x+a-5) \leq 0 \end{cases}$$

Знайти це число у кожному випадку.

- Довести нерівність $24 \sin x - 24 \cos x + 9 \sin 2x \leq 25$. Чи можлива рівність $24 \sin x - 24 \cos x + 9 \sin 2x = 25$?

III рівень

1. Нехай $ABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, $AB = AS$, AM і DL — висоти бічних граней ABS і CDS відповідно. Знайти гострий кут між прямими AM і DL .

- Довести, що число $4 \cos \frac{\pi}{12} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{24} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ є цілим і знайти це число.

■ 11 клас

I рівень

1. Задано вершини $A(1; 3; 2)$, $B(2; 5; 4)$, $D(-1; 1; 0)$, $C_1(3; 0; -2)$ паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайти координати його вершини D_1 .

2. Кожен із трьох ненульових векторів перпендикулярний до суми двох інших. Довести, що кожен два вектори — перпендикулярні.

3. Обґрунтувати чи спростувати рівність $\sqrt{9\sqrt{2}-8} - \sqrt{3\sqrt{2}-4} = \sqrt[4]{8}$.

II рівень

1. Довести нерівність $|\cos x(1 - \sin x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

2. Знайти усі такі значення параметра a , щоб існувало єдине ціле число x , для якого правильна нерівність $x^2 + (1-a)x + (a-2) \leq 0$.

III рівень

1. Нехай $ABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, $AB = AS$, AM і DL — висоти бічних граней ABS і ADS відповідно. Знайти гострий кут між прямими AM і DL .

2. Довести, що для довільних дійсних x справджується нерівність $2^{x^4-3x^3+2x^2-x} + 2^{x^4-5x^3+6x^2+x} \geq 2$. При яких значеннях числа x матиме місце рівність?



**ВІДДІЛЕННЯ
МАТЕМАТИКИ**

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ З МАТЕМАТИКИ

■ 9 клас

I рівень

1. Знайти довжину більшої діагоналі трапеції з основами 3 см і 7 см, у якої бічні сторони дорівнюють 13 см і 15 см.

2. Довести, що корені рівняння

$$4(x^2 + 2ax - 1 - a)^2 - 8a(x^2 + 2ax - 1 - a)(2x - 1) + (4a^2 - 1)(2x - 1)^2 = 0$$

не залежать від параметра a . Знайти ці корені.

II рівень

1. Нехай $8 < x < 12, 12 < y < 18$. Чи правда, що $4,8 < \frac{xy}{x+y} < 7,2$?
Відповідь обґрунтувати.

2. Знайти усі пари додатніх простих чисел $(x; y)$ для яких

$$x^2 - 17x = y^2 - 23y + 60.$$

3. У трикутнику ABC проведено висоту BH і медіану CB . Відомо, що площа трикутника HMA – четверта частина площі трикутника ABC . Довести, що трикутник ABC – рівнобедрений.

III рівень

1. Знайти усі можливі значення числа a , щоб множиною значень $f(x) = \frac{ax^2 - 3x + 6}{x^2 - x + 2}$ функції був проміжок $[3; 5]$.

2. Знайти усі такі трійки цілих чисел $(m; n; k)$, щоб справджувались обидві рівності $2^n - 5^k = 3$ та $3^m - 2^k = 1$.

■ 10 клас

I рівень

1. Довести, що корені рівняння

$$4(x^2 + 2ax - 1 - a)^2 - 8a(x^2 + 2ax - 1 - a)(2x - 1) + (4a^2 - 1)(2x - 1)^2 = 0$$

не залежать від числа a . Знайти ці корені.

2. Знайти довжину довшої діагоналі трапеції, основи якої дорівнюють 3 см і 7 см, а бічні сторони дорівнюють 13 см і 15 см.

3. Знайти усі можливі значення числа a , щоб множиною значень функції $f(x) = \frac{ax^2 - 3x + 6}{x^2 - x + 2}$ був проміжок $[3; 5]$.

II рівень

1. Знайти усі такі трійки цілих чисел $(m; n; k)$, щоб справджувались обидві рівності $2^n - 5^k = 3$ та $3^m - 2^k = 1$.

2. Знайти таке ціле число m щоб

$$\sqrt{7\sqrt{3}-12} + \sqrt{4\sqrt{3}-6} + \sqrt{13\sqrt{3}-12} = m\sqrt[4]{27}.$$

III рівень

1. Знайти усі розв'язки рівняння $\cos 3x + \sin 3x - 2\sin x = 0$, для яких справджується нерівність $-\frac{20\pi}{9} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$.

2. Нехай в піраміді $ABCD$ точка M – точка перетину медіан грані BCD , N – точка на ребрі AB , для якої $AB = 5BN$, K – точка на ребрі AC , для якої $AC = 9KC$. У якому відношенні площина MNK ділить ребро CD ?

■ 11 клас

I рівень

1. Знайти усі пари натуральних чисел $(m; n)$, для яких $m < n$ і $m^3 + n^3 = 854$.

2. Паралелограм є основою чотирикутної піраміди, у якій послідовні бічні ребра дорівнюють 7 см, 15 см, 24 см та 20 см. Довести, що паралелограм є прямокутником.

3. Довести, що корені рівняння

$$4(x^2 + 2ax - 1 - a)^2 - 8a(x^2 + 2ax - 1 - a)(2x - 1) + (4a^2 - 1)(2x - 1)^2 = 0$$

не залежать від числа a . Знайти ці корені.

II рівень

1. Довести, що для довільних значень параметрів a та b кубічне рівняння $4x^3 - (6 - 8a)x^2 + (2 - 4a + 2b)x - a - b = 0$ має корінь x найменні на одному з проміжків $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ або $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

2. Нехай висота трапеції дорівнює 12 см, а її діагоналі дорівнюють 13 см та 15 см. Якою може бути площа цієї трапеції?

III рівень

1. Нехай x, y, z — додатні дійсні числа і $xyz = 1$. Довести нерівність $x^7 + 9y^7 + 7z^3 \geq 13$. Знайти усі трійки чисел $(x; y; z)$, щоб справджувалась рівність $x^7 + 9y^7 + 7z^3 = 13$.

2. Знайти усі розв'язки системи рівнянь
$$\begin{cases} \sin x + 5 \sin y + 7 \sin z = 5 \\ \cos x + 5 \cos y + 7 \cos z = 12' \end{cases}$$

для яких справджуються нерівності $0 < x < \frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < y < 3\pi, \frac{3\pi}{2} < z < \frac{17\pi}{4}$.



**ВІДДІЛЕННЯ
ФІЗИКИ І АСТРОНОМІЇ**

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ З ФІЗИКИ

■ 8–9 клас

1. Підйомний кран рівномірно піднімає вантаж масою 5 т на висоту 15 м. Скільки часу триває підйом, якщо потужність двигуна 10 кВт, а ККД двигуна дорівнює 80%?

2. Дві пружини однакової довжини скріплені одними кінцями. Вільні кінці розтягують руками. Пружина, жорсткість 100 Н/м, видовжилась на 5 см. Яка жорсткість другої пружини, якщо вона видовжилась на 1 см?

3. Визначте силу тяжіння, що діє на сплав міді і цинку об'ємом 30 см³. Маса міді на 50% більша за масу цинку. Густина міді і цинку відповідно рівні 8,9 та 7,1 г/см³.

4. Визначте, яку найменшу масу алюмінієвої дротини потрібно намотати на корок масою 20 г, щоб він разом з дротиною повністю занурився у воду. Густина корка і алюмінію відповідно дорівнюють 200 та 2700 кг/м³.

5. У воду з температурою 20°C, що знаходиться в калориметрі, вкинули тіло, нагріте до 100°C. Через якийсь час в калориметрі встановилась температура 40°C. Яку температуру матиме вода, якщо не виймаючи першого тіла, в неї кинути ще два таких саме тіла, нагрітих до температури 100°C? Теплоємність калориметра нехтовно мала. Теплообмін з навколишнім середовищем відсутній.

6. На рис.1 представлений ранішній забіг учня від дому до школи. Школа знаходиться на відстані 700 метрів від будинку.

Дайте відповіді на запитання:

1. На якій відстані від школи учень був через 3 хвилини від початку руху?

2. Скільки часу залишилось бігти, коли він пробіг половину шляху?

3. Скільки метрів залишилось до школи, коли він пробіг половину часу? Час зупинки вважати часом його руху.
4. Побудуйте графік залежності швидкості учня від часу.
5. Визначить середню швидкість руху за першу половину часу.
6. Визначить середню швидкість руху на другій половині шляху.
7. Скільки часу учень біг з максимальною швидкістю?

7. У електричному колі (рис.2) всі лампи однакові і підключені до напруги 110 В. На кожній лампі написано «110 В, 60 Вт». Визначить силу струму та напругу на кожній лампі. Яка з ламп буде горіти яскравіше?

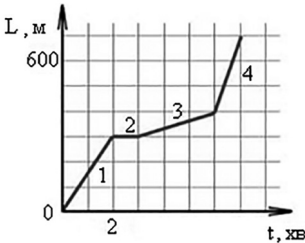


Рис. 1

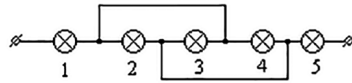


Рис. 2

■ 10 клас

1. Однорідний стержень довжини l своїм нижнім кінцем торкається гладенької горизонтальної поверхні. Верхній кінець стержня підвішений на нитці таким чином, що стержень утворює з горизонтальною поверхнею кут α . Нитку перепалюють. У який бік і на яку відстань зміститься нижній кінець стержня після падіння?

2. Важкий поршень маси m вставляють у відкриту зверху вертикальну циліндричну посудину, площа перерізу якої S дорівнює площі поршня, і відпускають. Поршень починає рухатися вниз. Знайти тиск повітря в посудині в момент, коли швидкість поршня буде максимальною. Атмосферний тиск дорівнює p_0 . Тертям знехтувати.

3. Знайти опір 100-ватної лампи розжарення при кімнатній температурі $t_0 = 20^\circ\text{C}$, якщо при підключенні її до мережі з напругою $U = 220\text{ В}$ температура її нитки сягає $t = 2820^\circ\text{C}$. Температурний коефіцієнт опору матеріалу нитки $\alpha = 4,8 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$.

4. Деяку масу m ідеального газу з молярною масою μ нагрівають у циліндрі під поршнем так, що температурта змінюється пропорційно квадрату тиску ($T = \alpha p^2$, де α – стала величина) від початкової температури T_1 до кінцевої температури T_2 . Знайти роботу, виконану газом у цьому процесі.

5. Відстань від освітленого предмета до екрану $L = 100\text{ см}$. Лінза, розташована між ними, дає чітке зображення предмета на екрані при двох положеннях, відстань між якими дорівнює $l = 20\text{ см}$. Знайти фокусну відстань лінзи.

6. У ракеті, що злітає вертикально вгору з прискоренням $a = 5,2\text{ м/с}^2$, встановлено маятниковий годинник. На яку висоту підніметься ракета за $t = 10\text{ с}$ за маятниковим годинником у ракеті?

7. У посудину, що містила $m_1 = 500\text{ г}$ води при температурі $t = 15^\circ\text{C}$, кинули $m_2 = 50\text{ г}$ мокрого снігу. Температура води в посудині понизилася на $\Delta t = 5^\circ\text{C}$. Скільки води було в снігу? Питома теплоємність води $c = 4,2\text{ кДж/(кг} \cdot \text{K)}$, питома теплота плавлення снігу $\lambda = 330\text{ кДж/кг}$. Втратами теплоти знехтувати.

■ 11 клас

1. Під час швидкісного спуску лижник їхав вниз по схилу з кутом нахилу $\alpha = 45^\circ$, не відштовхуючись палками. Коефіцієнт тертя лиж об сніг $\mu = 0,1$. Сила опору повітря рухові лижника пропорційна квадрату швидкості: $F = k \cdot v^2$, де $k = 0,7\text{ кг/м}$. Яку максимальну швидкість міг би розвинути лижник, якщо його маса $m = 70\text{ кг}$?

2. Дерев'яний брусок, що має форму прямокутного паралелепіпеда, плаває у воді. Площа основи бруска $S = 500\text{ см}^2$, його висота $h = 10\text{ см}$. Яку роботу потрібно виконати, щоб повністю занурити

цей брусок у воду? Густина матеріалу бруска $S = 0,6 \text{ г/см}^3$, його висота $h = 10 \text{ см}$. Яку роботу потрібно виконати, щоб повністю занурити цей брусок у воду? Густина матеріалу бруска $\alpha = 0,6 \text{ г/см}^3$.

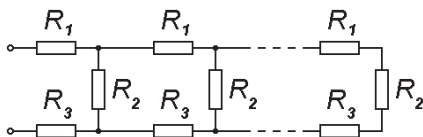
3. При зміні струму в котушці індуктивності на величину $\Delta I = 1 \text{ А}$ за час $\Delta t = 0,6 \text{ с}$ в ній індукується ЕРС $E = 0,2 \text{ мВ}$. Яку довжину λ буде мати радіохвиля, що випромінюватиметься генератором, коливальний контур якого складається з цієї котушки та конденсатора ємності $C = 14,1 \text{ нФ}$?

4. У суміш льоду з водою помістили нагрівач потужністю $P = 700 \text{ Вт}$ і підключили його до електромережі. Через $\tau = 5,5 \text{ хв}$ температура почала зростати зі швидкістю $\alpha = 10 \text{ К/хв}$. Визначити початкові маси льоду $m_{\text{л}}$ та води $m_{\text{в}}$ у суміші. Питома теплоємність води $c = 4,2 \text{ кДж (кг}\cdot\text{К)}$, питома теплота плавлення льоду $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$.

5. Суцільний мідний диск радіуса $R = 10 \text{ см}$ обертається навколо своєї осі з частотою $\nu = 100 \text{ Гц}$. Вісь обертання вертикальна. Знайти напруженість електричного поля E , що виникає всередині диска, як функцію відстані до осі r , а також різницю потенціалів $\Delta\phi$ між віссю і краєм диска.

6. У запаяній з одного кінця трубці з перерізом S на відстані l від запаяного кінця знаходиться поршень маси m . Інший кінець трубки відкритий, по обидва боки від поршня знаходиться повітря, тиск якого дорівнює p_0 . Трубку починають обертати з кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, що проходить через запаяний кінець трубки. На якій відстані x від запаяного кінця буде перебувати поршень? Температуру вважати сталою, тертям знехтувати.

7. Знайти опір нескінченного електричного кола, утвореного повторенням однієї і тієї ж ланки, що складається з трьох резисторів з опорам R_1, R_2 і R_3 (див. рис.).



Формат 60 × 84 1/16. Друк цифровий.
Папір офсетний 80 г/м²